ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

Φυσική Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Σώμα μάζας M=1kg δένεται στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς K=100 N/m που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και το άλλο άκρου του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Στη μάζα M βρίσκεται σειρήνα παραγωγής ήχου συχνότητας f_s=100 Hz. Ένας ακίνητος παρατηρητής συγκρατεί το σώμα M σε θέση όπου το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά x_1=0,3 m. Τη χρονική στιγμή t=0 ο παρατηρητής αφήνει ελεύθερο το σώμα ενώ ταυτόχρονα του προσδίδει ταχύτητα V_o=4m/s. Ένα δεύτερο σώμα μάζας m=5/3 kg δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους l= 1,6 m του οποίου το άλλο άκρο δένεται σε ακλόνητο σημείο K, εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $υ_o$ ώστε μόλις να καταφέρει να εκτελέσει την ανακύκλωση κινούμενο σε κατακόρυφο επίπεδο . Τη στιγμή που το σώμα μάζας m φθάνει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του κτυπά μετωπικά και ελαστικά με το σώμα μάζας M, το οποίο τη στιγμή της κρούσης βρίσκεται στη θέση x=+A . Να βρεθούν:

α)Η αρχική ταχύτητα $υ_o$ της μάζας m που εκτελεί την ανακύκλωση.

β) Το πλάτος της αρχικής και της νέας ταλάντωσης που θα εκτελέσει η μάζα M.

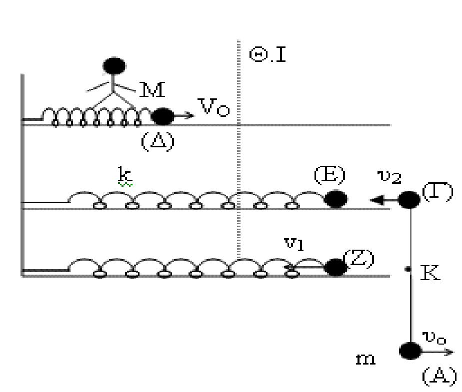
γ) Η συχνότητα f_A με την οποία αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής τον ήχο που εκπέμπει η σειρήνα της μάζας M στη θέση x=+A .

δ) Η σχέση που δίνει την συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε συνάρτηση με το χρόνο μετά την κρούση, θεωρώντας σαν t=0 τη στιγμή της κρούσης και την απομάκρυνση λόγω ταλάντωσης θετική . Θετική φορά κίνησης θεωρείστε τη φορά της V_o.

ε) Ο λόγος της μέγιστης συχνότητας f_{Amax} προς την ελάχιστη συχνότητα f_{Amin} που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

Δίνεται g=10m/s^2, η ταχύτητα του ήχου στον αέρα υ=340m/sec.

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ



α) Το σώμα μάζας m για να κάνει ανακύκλωση θα διέρχεται από το ανώτερο σημείο Γ της τροχιάς του εκτελώντας κυκλική κίνηση. Άρα από το δεύτερο νόμο Newton:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{\alpha_K} \Rightarrow T+B = m\frac{υ_2^2}{l} \Rightarrow T=\frac{mυ_2^2}{l} - mg \quad (1)$$

πρέπει: T ≥ 0, οπότε $(1) \Rightarrow \frac{mυ_2^2}{l} - mg \geq 0 \Rightarrow υ_2 \geq \sqrt{gl}$

Για να εκτελεί οριακή ανακύκλωση πρέπει η ταχύτητα $υ_2$ στην ανώτερη θέση να είναι ελάχιστη.
Οπότε

$$υ_2 = \sqrt{gl} \Rightarrow υ_2 = 4m/s$$

Επειδή στη μάζα m ενεργεί το βάρος που είναι συντηρητική δύναμη και W_T = 0 ισχύει ΑΔΜΕ (Α, Γ) με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την κατώτερη θέση (Α) του σώματος m.

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}mυ_o^2 = \frac{1}{2}mυ_2^2 + mg2l \rightarrow υ_o^2 =$$

$$υ_2^2 + 4gl \rightarrow υ_o = \sqrt{υ_2^2 + 4gl} = \sqrt{gl+4gl} = \sqrt{5gl}$$

$$\Rightarrow υ_o = 2\sqrt{20} \text{ m/sec}$$

β) Το σώμα μάζας M τη στιγμή που εκτοξεύεται από τον παρατηρητή αρχίζει να εκτελεί Γ.Α.Τ.
Άρα από ΑΔΕ$_{ΤΑΛ\,(Δ,\ ακραία\ θέση\ Ε)}$:

$$K_Δ + U_{Δ(ΤΑΛ)} = E_{ολ(ΤΑΛ)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\kappa x_1^2 + \frac{1}{2}MV_o^2 = \frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow \kappa x_1^2 + MV_o^2 = KA^2$$

$$\rightarrow A = \sqrt{\frac{\kappa x_1^2 + MV_o^2}{K}} \rightarrow A=0,5 \text{ m}$$

Λόγω ελαστικής κρούσης βρίσκω την ταχύτητα V_1 της μάζας M μετά την κρούση χρησιμοποιώντας ΑΔΟ. Στην ακραία θέση ταλάντωσης το σώμα M έχει $υ_1$=0.
Μετά την κρούση έχει ταχύτητα

$$V_1 = \frac{2m\,υ_2}{M+m} \rightarrow V_1 = -5m/s$$

Τελικά από ΑΔΕ ταλ(Z, καινούργια θέση μέγιστης απομάκρυνσης)

$$E'_{ΟΛ(ΤΑΛ)} = K_Z + U_{Z(ΤΑΛ)} \rightarrow \frac{1}{2}KA'^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}KA^2$$

$$\rightarrow A' = \sqrt{\frac{MV_1^2 + KA^2}{K}} \rightarrow A' = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

γ) Ο παρατηρητής είναι ακίνητος και στη θέση E (λίγο πριν την κρούση) το σώμα μάζας M έχει στιγμιαία ταχύτητα μηδέν. Οπότε $f_A=f_s$=100Hz.

δ)Η καινούργια ταλάντωση που θα εκτελέσει η μάζα M έχει αρχική φάση $φ_o$.

$$x = A'ημ(ωt + φ_o) \xrightarrow[ω=\sqrt{\frac{K}{M}}=10\ r/s]{t=0:\ x=+0,5m} 0,5 = \frac{\sqrt{2}}{2}ημ\,φ_o$$

$$\Rightarrow ημ\,φ_o = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Οπότε $φ_o$=π/4 με V_1>0 (απορρίπτεται)
και $φ_o$=3π/4 με V_1<0 (δεκτή)
Άρα η $φ_o$=3π/4
Η εξίσωση της ταχύτητας για τη μάζα M μετά την κρούση θα είναι:

$$V_M = ωA'συν(ωt+φ_o) \rightarrow V_M = 5\sqrt{2}συν\left(10t+\frac{3π}{4}\right)$$

$$\rightarrow V_M = -5\sqrt{2}συν\left(10t+\frac{π}{4}\right)$$

Οπότε η συχνότητα που θα ακούει ο παρατηρητής σε συνάρτηση με το χρόνο θα είναι:

$$f_A = \frac{υ}{υ+V_M}fs \rightarrow f_A = \frac{340}{340 - 5\sqrt{2}συν(10t + π/4)} \cdot 100$$

$$\rightarrow f_A = \frac{34 \cdot 10^3}{340 - 5\sqrt{2}συν\left(10t + \frac{π}{4}\right)}$$

ε) Ο παρατηρητής ακούει f_{Amax} όταν ο παρανομαστής γίνει ελάχιστος, δηλαδή $340 - 5\sqrt{2}$ δηλαδή

$$f_{Amax} = \frac{340 \cdot 10^3}{340 - 5\sqrt{2}}$$

ενώ ακούει f_{Amin} όταν ο παρανομαστής γίνει μέγιστος, δηλαδή $340 + 5\sqrt{2}$ δηλαδή

$$f_{Amin} = \frac{34 \cdot 10^3}{340 + 5\sqrt{2}}$$

Άρα

$$\frac{f_{Amax}}{f_{Amin}} = \frac{340 + 5\sqrt{2}}{340 - 5\sqrt{2}}$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**